**Université A. MIRA de Béjaia**
**Faculté Sciences Exactes** L2.
**Département Informatique**

**Logique mathématique**

# Correction de la série de TD 3 (2014-2015)

**Exercice 1:** Déterminons les occurrences libres et liées des trois formules données :

**1 :** Pour la formule $\forall \mathbf{z}((\forall x\, a(x,y)) \Rightarrow \mathbf{a(z,x)})$,le champs du quantificateur universel relatif à la variable $x$, $(\forall x)$ est indiqué par une sous-accolade et le champs du quantificateur universel relatif à la variable $z$, $(\forall z)$ est souligné et il n'y a pas de quantificateur relatif à la variable $y$, ainsi on constate que :

- la variable $x$ à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est liée et celle à droite est libre.
- la variable $z$ est liée tout le temps.
- la variable $y$ est libre,

**2 :** Pour la formule $\forall \mathbf{y\, a(z,y)} \Rightarrow \forall \mathbf{z\, a(z,x)}$, le champs du quantificateur universel relatif à la variable $y$ est souligné par une seule ligne el le champs du quantificateur universel relatif à la variable $z$ est souligné par deux lines, ainsi on constate que :

- la variable $y$ à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est liée et celle à droite est libre.
- la variable $z$ à gauche du connecteur $\Rightarrow$ est libre et celle à droite est liée.

**3 :** Pour la formule $(\forall \mathbf{y} \exists x \exists z \beta(x,y,f(x,y))) \vee (\forall \mathbf{x\, a(y,g(x))})$, le champs du quantificateur universel relatif à la variable $y$ est souligné par une seule ligne, le champs du quantificateur existentiel relatif à la variable $x$ à gauche du connecteur $\vee$ est indiqué par une sous-accolade et le champs du quantificateur universel relatif à la variable $x$ à droite du connecteur $\vee$ est souligné par deux lignes, ainsi on constate que :

- la variable $y$ est liée dans toutes ses occurrences.
- la variable $x$ à gauche du connecteur $\vee$ est liée au quantificateur existentiel $(\exists y)$ et la variable $x$ à droite du connecteur $\vee$ est liée au quantificateur universel $(\forall x)$.
- la variable $y$ est libre,

- il n'y a pas de variable $z$ dans la formule donc le quantificateur relatif à cette variable $z$ peut être exclu de cette formule ainsi la formule sera équivalente à la formule : $(\forall \mathbf{y} \exists x \beta(x,y,f(x,y))) \vee (\forall \mathbf{x\, a(y,g(x))})$

**Exercice 2:** Le langage donné est le suivant $L = \{P, R, f, g, c\}$ où les symboles des relations (prédicats) sont $P$ unaire et $R$ binaire. Les symboles de fonctions sont $f$ unaire et $g$ unaire. Le symbole $c$ est un symbole de constante. Pour chacune des expressions données de 1 jusqu'à 14 on déterminera s'il s'agit d'une formule du langage $L$ donné, si ce n'est pas le cas justifier pourquoi :

1) $\forall(x,y)$ cette expression n'est pas une formule du langage donné car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.
2) $\alpha(x,y)$ cette expression n'est pas une formule du langage donné car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.
3) $g(x,y)$ cette expression n'est pas une formule du langage donné car il n'y a pas de prédicat dedans alors que le langage donné est un langage d'ordre 1.
4) $R(g(x,y))$ cette expression n'est pas une formule du langage donné car la fonction $g$ est binaire et dans cette formule on lui a associé deux arguments.
5) $P(R(x,y))$ cette expression est une formule du langage donné, ~~elle vérifie toutes les conditions exigées.~~ n'est pas
6) $x = g(x,y)$ cette expression n'est pas une formule du langage donné car elle contient le symbole égalité "=" qui n'a aucun sens dans ce langage d'ordre 1.
7) $R(f(x), g(x,c))$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
8) $\forall x R(x,x)$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
9) $\forall x \exists y R(x,x)$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
10) $\exists y(y = c \wedge P(y))$ cette expression n'est pas une formule du langage donné car elle contient le symbole égalité "=" qui n'a aucun sens dans un langage de premier ordre, aussi $c$ est une constante et elle combiné à un connecteur.
11) $\exists x(P(f(x) \wedge \forall y R(x,y))$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
12) $(\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x,y))$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
13) $\forall x \forall x P(g(f(x),x))$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.
14) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(x,y))$ cette expression est une formule du langage donné, elle vérifie toutes les conditions exigées.

**Exercice 3:** On a $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 : \forall x \exists y P(x,y); x \text{ est lée et } y \text{ est liée.} \\ \alpha_2 : \forall x P(x,y); x \text{ est liée et } y \text{ est libre.} \\ \alpha_3 : \exists y P(x,y); x \text{ est libre et } y \text{ est liée.} \end{cases}$$

Soit la formule $F \equiv \forall x P(x,y) \wedge \forall y \overline{P(x,y)}$.

**I.)** Montrons que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont satisfiables :

Pour montrer qu'une formule est satisfiable il suffit de trouver une interprétation et une valuation pour les quelles cette formule est satisfaite.

**Remarque : comme solution je vais vous donner des interprétation et des valuation telles que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient satisfiables mais ces interprétations ne sont pas uniques vous pouvez trouver d'autres interprétations.**

**Pour $\alpha_1$ :** Je vous suggère l'interprétation $I_1$ de domaine de base $D_1 = \mathbb{N}$, et on définit le prédicat $P$ : " $\leq$ ". Avec cette interprétation, on a : $I_1(\alpha_1) : \forall x \exists y\ (x \leq y)$. On a les deux variables $x$ et $y$ sont liées.

On constate que $\alpha_1$ est satisfait tout le temps car pour tout entier on peut lui trouver un entier qui lui soit supérieur, c'est à dire $\alpha_1$ est satisfaite pour toutes les valuation de $I_1$, ainsi $I_1$ est un modèle, (i.e. $I_1 \models \alpha_1$).

**Pour $\alpha_2$ :** Je vous suggère l'interprétation $I_2$ de domaine de base $D_2 = \mathbb{N}^*$, et on définit le prédicat $P(x,y)$ : *$x$ est multiple de $y$*. Avec cette interprétation, on a : $I_2(\alpha_2)$ : *$\forall x, x$ est un multiple de $y$*. On a la variable $x$ est liée et la variable $y$ est libre. Soit alors valuation $v(y) = 1$, pour cette valuation $\alpha_2$ est satisfaite car tout entier non nul est un multiple de 1, donc $I_2 \models (\alpha_2)_{v(y=1)}$. Cependant $I_2$ n'est pas un modèle de $\alpha_2$, en effet cette formule $\alpha_2$ n'est pas satisfiable pour toutes les valuations de $I_2$, en effet pour par exemple la valuation $v(y) = c$ avec $c \neq 1$, $\alpha_2$ n'est pas satisfaite, i.e. $_2 \not\models \alpha_2$.

**Pour $\alpha_3$ :** Je vous suggère l'interprétation $I_3$ de domaine de base $D_3 = \{2,4,6,8\}$, et on définit le prédicat $P(x,y)$ : "$x$ diviseur de$y$". Donc pour cette interprétation on a : $I_3(\alpha_3)$ : $\exists y, x$ est un diviseur de$y$. On a la variable $x$ est libre et la variable $y$ est liée. Pour la valuation $v(x) = 2$, on a $_3(\alpha_3)$ : $\exists y/2$ est un diviseur de y est satisfaite donc $I_3 \models (\alpha_3)_{v(x)=2}$. On constate que pour toutes les valuations possible de $x$, la formule $\alpha_3$ est satisfaite, donc $I_3$ est un modèle de $\alpha_3$ (i.e. $I_3 \models \alpha_3$).

**II.)** Précédemment on a trouvé une interprétation $I_1$ qui est un modèle pour la formule $\alpha_1$ et une interprétation $_3$ qui est un modèle pour la formule $\alpha_3$, maintenant je vous propose une interprétation qui soit un modèle pour l'ensemble des trois formules données $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Soit l'interprétation $I'$ de domaine de base $D' = \{1\}$ et telle que $P(x,y)$ : "$x \leq y$". Pour cette interprétation il est facile de vérifier que : $I' \models \alpha_1$, $I' \models \alpha_2$ et $I' \models \alpha_3$, donc $E$ est satisfiable et même plus $I'$ est un modèle pour $E$ (i.e. $I' \models E$).

**III.)** Montrons que $F$ n'est pas une conséquence logique de $E$.
On a : $F \equiv \forall x P(x,y) \wedge \forall y \overline{P(x,y)}$, on constate que $y$ est libre dans la partie gauche de $\wedge$ et $x$ est liée.
On reprend l'interprétation $I'$ considérée précédemment (bien sur on aurais pu choisir une autre interprétation), pour cette interprétation $I'$ on a montrer que :

$$I' \models E, \tag{1}$$

On a : $I'(F) : \underbrace{\underbrace{\forall x(x \leq 1)}_{vraie} \wedge \underbrace{\forall y, x > y}_{fausse}}_{fausse}$, donc :

$$I' \not\models F \tag{2}$$

alors de (1) et (2) on conclut que $F$ n'est pas une conséquence logique de $E$, i.e. $E \not\models F$.
**Exercice 4:** On a : $F \equiv \exists x \forall y R(x) \Rightarrow R(y)$. on a la variable $x$ est liée et la variable $y$ est libre.
**1.** On va trouver un modèle pour la formule $F$. Soit alors l'interprétation $I$ de domaine de base $D = \{2, 6, 20, 40\}$ et $R(x)$ : "$x$ est pair". Pour toutes les valuations possibles $\{v(y) = 2, v(y) = 6, v(y) = 20, v(y) = 40\}$ de la variable libre $y$, on constate que $F$ est vraie, car :

$$\underbrace{\underbrace{\exists x R(x)}_{vraie} \Rightarrow R(y)}_{vraie}.$$

Donc $I'$ est un modèle de $F$ (i.e. $I' \models F$).
**2.** La forme prénexe de $F$ est la suivante :

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists R(x) \Rightarrow R(y); \\ &\equiv \forall x[R(x) \Rightarrow R(y)]. \end{aligned}$$

Remarque on a enlever le quantificateur de $y$ car la variable $y$ est libre elle n'est pas dans le champs de ce quantificateur donc ça ne sert à rien de garder ce quantificateur.
**3.** La forme prénexe de la négation de la formule $F$ c'est exactement la négation de la forme prénexe de $F$, c'est à dire c'est :

$$\begin{aligned} \overline{F} &\equiv \overline{\forall x[R(x) \Rightarrow R(y)]}, \\ &\equiv \exists x[R(x) \Rightarrow R(y)]. \end{aligned}$$

(remarque il faut réviser les identités données en cours qui sont nécessaires pour trouver une forme prénexe.)
**4.** La forme skolem de $F$ est la exactement la forme prénexe de $F$ car il n'y a pas de quantificateur existentiel dans la forme prénexe de $F$, donc :

$$F^{sko} \equiv \forall x[R(x) \Rightarrow R(y)].$$